УДК 517.54

С.И. Калмыков

О ПОЛИНОМАХ И РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ, НОРМИРОВАННЫХ НА ДУГАХ ОКРУЖНОСТИ

Введение

Неравенствам для полиномов и рациональных функций посвящена обширная литература (см., например, библиографию в [1], [2]). В последнее время значительное внимание уделяется полиномам с ограничениями на дугах единичной окружности [3]-[10]. В частности, в работе [9] показано, как из принципа мажорации для мероморфных функций [11]-[13] вытекают новые теоремы типа покрытия, искажения и оценки модуля произведения старшего и свободного коэффициентов алгебраческого полинома с ограничениями на дугах окружности. Цель настоящей работы – уточнение и обобщение результатов статьи [9]. Работа состоит из двух частей. В первой части приводятся теоремы для рациональных функций, непосредственно вытекающие из принципа мажорации (см. [11]- [14]), примененного к подходящей мероморфной функции, и зависящие от функции Грина и внутреннего радиуса дополнительных к дугам окружности областей. Во второй части получены неравенства для полиномов в случае одной дуги. Эти неравенства дополняют соответсвующие результаты статьи [9]. В основе доказательств в этой части работы лежит подход, предложенный В.Н. Дубининым в работе [15] и в общих чертах сводящийся к следующему: по заданному полиному строится аналитическая функция, а затем к ней приненяются методы геометрической теории функций комплексного переменного. Технические детали доказательств заимствованы из работы А.В. Олесова [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке the European Research Council Advanced grant № 267055 (the author had a postdoctoral position at the Bolyai Institute, University of Szeged, Aradi v. tere 1, Szeged 6720, Hungary) и Министерства образования и науки Россиской Федерации, соглашение 14.A18.21.0366

Всюду ниже Γ – объединение конечного числа непересекающихся замкнутых невырожденных дуг единичной окружности $|z| = 1$, $D = \overline{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$, $g_B(z, \zeta)$ – функция Грина области B и $r(B, z)$ – внутренний радиус области B относительно точки z [14].

$$\Gamma_\alpha = \{z = e^{ix} : -\alpha \le x \le \alpha\}, \; 0 < \alpha < \pi.$$

В работе будут рассматриваться полиномы с комплексными коэффициентами вида

$$P(z) = c_n z^n + ... + c_k z^k, \quad n > k, \quad c_n c_k \neq 0, \tag{1}$$

а также рациональные функции

$$R(z) = \frac{P(z)}{z^{p_0} \prod_{j=1}^{p} (z - a_j)}, \quad p_0 \ge 0, \quad a_j \in \mathbb{C}_z \setminus (\Gamma \cup \{0\}), \tag{2}$$

где P – полином вида (1).

$$x_+ = \max\{0, x\}.$$

$$m = m(F; \Gamma) = \min_{z \in \Gamma} |F(z)|,$$

$$M = M(F; \Gamma) = \max_{z \in \Gamma} |F(z)|,$$

где F - полином или рациональная функция в зависимости от контекста.

Под степенью рациональной функции будем понимать число прообразов бесконечности, лежащих в $\overline{\mathbb{C}}_z$, с учетом кратности.

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

– функция Жуковского.

Регулярная ветвь функции

$$\widetilde{\Phi}(\omega) = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1},$$

обратной к функции Жуковского, выбирается во внешности дуги окружности, соединяющей точки ± 1 и проходящей через точку $i\,\mathrm{tg}(\alpha/2)$, из условия $\widetilde{\Phi}(\infty) = \infty$, а функция

$$\Phi(\omega) = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}$$

определена во внешности отрезка $[-1, 1]$ из условия $\Phi(\infty) = \infty$.

$$\delta(\xi) = \frac{2}{1 - \cos\alpha}\Psi(\xi) - \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

§1. Неравенства для рациональных функций

Теорема 1. *Пусть R – несократимая рациональная функция вида (2) и пусть $h(z) = R(z)\overline{R(1/\overline{z})}$. Тогда для любой точки z выполняется неравенство*

$$\left|2h(z) - M^2 - m^2 + 2\sqrt{(h(z)-M^2)(h(z)-m^2)}\right| \leq$$

$$\leq (M^2 - m^2)\exp((n-k-p)_+(g_D(z,0) + g_D(1/\overline{z},0)) +$$

$$+\sum_{j=1}^{p'}(g_D(z,a'_j) + g_D(1/\overline{z},a'_j)))$$

(при любом выборе значения корня в левой части), где a'_j - те a_j, которые являются полюсами функции h, а p' – их число с учетом порядка. Равенство в точке $z \neq 0,\infty$ и $z \notin \Gamma$ при некотором значении корня достигается в том и только том случае, когда для функции h $h(D) = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2]$ и h осуществляет полное N-кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2]$ областью D, где N– степень h.

Доказательство. Области D и $G = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2]$ имеют классические функции Грина. Функция h мероморфна в D и имеет в области D полюса в точках a'_j и $1/\overline{a'_j}$, $j = 1...p'$, и полюса порядка $(n-k-p)_+$ в точке $z = 0$ и точке $z = \infty$. Кроме того, при стремлении точки z к множеству Γ все предельные граничные значения функции h лежат на отрезке $[m^2, M^2]$. По теореме 1 работы [13] в точках области D справедливо неравенство

$$g_G(f(z),\infty) \leq (n-k-p)_+(g_D(z,0)+g_D(1/\overline{z},0))+\sum_{j=1}^{p'}(g_D(z,a'_j)+g_D(z,1/\overline{a'_j})),$$

причем равенство в точках $z \neq 0$ и ∞ выполняется тогда и только тогда, когда $G = h(D)$ и функция h осуществляет полное N-кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2]$ областью D. Из симметрии области D относительно окружности $|z| = 1$ имеем

$$g_D(z,\zeta) = g_D(1/\overline{z}, 1/\overline{\zeta}), \quad z,\zeta \in D.$$

Осталось заметить, что

$$g_G(w,\infty) = \log\left|\frac{2w - M^2 - m^2}{M^2 - m^2} + \sqrt{\left(\frac{2w - M^2 - m^2}{M^2 - m^2}\right)^2 - 1}\right|.$$

Теорема доказана.

Замечание. Экстремальная рациональная функция определяется с точностью до умножения на целую степень z и на произведение Бляшке с полюсами, не лежащими на Γ.

Теорема 2. *В обозначениях теоремы 1 для коэффициентов несократимой рациональной функции R вида (2) при $n-k>p$, справедливо неравенство*

$$\frac{|c_n c_k|}{\prod\limits_{j=1}^{p}|a_j|} \leq \frac{1}{4}(M^2-m^2)r^{2(n-k-p)}(D,0)\exp\left(\sum_{j=1}^{p'}(g_D(\infty,a'_j)+g_D(\infty,1/\overline{a'_j}))\right). \tag{3}$$

Равенство в (3) достигается в том и только том случае, когда для функции $h(z)=R(z)\overline{R(1/\overline{z})}$ $h(D)=\overline{\mathbb{C}}_w\setminus[m^2,M^2]$ и h осуществляет полное N-кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}}_w\setminus[m^2,M^2]$ областью D, где $N-$ степень h.

Доказательство. Из неравенства И.П. Митюка [14] (см. также [11, Следствие 1] имеем

$$\frac{|c_n c_k|}{\prod\limits_{j=1}^{p}|a_j|} \leq \frac{r^{(n-k-p)}(D,\infty)}{r(G,\infty)}\exp\{(n-k-p)g_D(0,\infty)+$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{p'}(g_D(\infty,a'_j)+g_D(\infty,1/\overline{a'_j}))\right)\right\},$$

причем равенство выполняется только в случае, указанном в формулировке теоремы. Легко видеть, что

$$\log|z|+g_D(z,0)\equiv g_D(z,\infty).$$

Поэтому

$$\log r(D,0)=g_D(0,\infty).$$

Наконец, прямые вычисления дают

$$r(\overline{\mathbb{C}}_w\setminus[m^2,M^2],\infty)=\frac{1}{\operatorname{cap}([m^2,M^2])}=\frac{4}{M^2-m^2}.$$

Теорема доказана.

Обозначим через $\omega(z,E,\Omega)$ гармоническую меру множества $E\subset\partial\Omega$ в точке z относительно области Ω. В случае $\Omega=D$ плотность гармонической меры определяется следующим образом:

$$\varpi(\zeta,e^{ix})=\frac{\partial}{\partial x}\omega(\zeta,\Gamma\cap\{e^{i\theta}:0\leq\theta\leq x\},D),\ \ \zeta\in D,\ \ e^{ix}\in\Gamma.$$

Теорема 3. *В обозначениях теоремы 1 для несократимой рациональной функции R вида (2) имеет место неравенство*

$$|(|R(z)|^2)'_x| \le 2\pi((n-k-p)_+\varpi(\infty,z)+\sum_{j=1}^{p'}\varpi(a'_j,z))\sqrt{(M^2-|R(z)|^2)(|R(z)|^2-m^2)}, \tag{4}$$

где $z=e^{ix}\in\Gamma$. Равенство в (4) достигается тогда и только тогда, когда для функции $h(z)=R(z)\overline{R(1/\overline{z})}$ $h(D)=\overline{\mathbb{C}}_w\setminus[m^2,M^2]$ и h осуществляет полное N-кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}}_w\setminus[m^2,M^2]$ областью D, где N– степень h.

Доказательство. Функция h, заданная в области D, удовлетворяет условиям, при которых справедливо следствие 2 работы [12], если в качестве G взята область $\overline{\mathbb{C}}_w\setminus[m^2,M^2]$. Следовательно,

$$\frac{|R'(z)\overline{R(1/\overline{z})}+R(z)\overline{R'(1/\overline{z})}(-1/z^2)|}{\sqrt{(M^2-|R(z)|^2)(|R(z)|^2-m^2)}}$$

$$=\frac{|zR'(z)\overline{R(z)}-\overline{z}\overline{R'(z)}R(z)|}{\sqrt{(M^2-|R(z)|^2)(|R(z)|^2-m^2)}}=\frac{2|\Im zR'(z)\overline{R(z)}|}{\sqrt{(M^2-|R(z)|^2)(|R(z)|^2-m^2)}}$$

$$\le (n-k-p)_+\left(\frac{\partial g_D(z,\infty)}{\partial n^{\pm}}+\frac{\partial g_D(z,0)}{\partial n^{\pm}}\right)+\sum_{j=1}^{p'}\left(\frac{\partial g_D(z,a'_j)}{\partial n^{\pm}}+\frac{\partial g_D(z,1/\overline{a'_j})}{\partial n^{\pm}}\right),$$

где $z\in\Gamma$, а $\frac{\partial}{\partial n^+}$ означает дифференцирование вдоль радиуса от центра единичной окружности, а $\frac{\partial}{\partial n^-}$ – в противоположном направлении. Из того факта, что

$$\varpi(a,z)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial g_D(z,a)}{\partial n^+}+\frac{\partial g_D(z,a)}{\partial n^-}\right],\ \ z\in \operatorname{int}(\Gamma),$$

следует

$$2|\Im zR'(z)\overline{R(z)}|\le \pi((n-k-p)_+(\varpi(\infty,z)+\varpi(0,z))+$$

$$+\sum_{j=1}^{p'}(\varpi(a'_j,z)+\varpi(1/\overline{a'_j},z)))\sqrt{(M^2-|R(z)|^2)(|R(z)|^2-m^2)}.$$

Здесь под $\operatorname{int}(\Gamma)$ понимается множество Γ, из которого исключены концы образующих его дуг. Ввиду симметрии области D

$$\varpi(a,z)=\varpi(1/\overline{a},z),\ \ a\in\overline{\mathbb{C}}_z\setminus\Gamma,\quad z\in\operatorname{int}(\Gamma).$$

Для завершения доказательства неравенства осталось заметить, что

$$|\Im zR'(z)\overline{R(z)}|=\left|\Im\frac{zR'(z)}{R(z)}R(z)\overline{R(z)}\right|=\frac{1}{2}|(|R(z)|^2)'_x|.$$

Утверждение о знаке равенства следует из соответствующего утверждения теоремы 2 работы [12] или следствия 1 работы [13]. Теорема доказана.

Рассмотрим способ нахождения экстремальной рациональной функции для одной дуги $\Gamma = \Gamma_\alpha$. Для этого воспользуемся рассуждениями из работ [9] и [16, стр. 106-107]. Предположим, что $M = 1$ и $m = 0$. Знаки равенств в теоремах 1-3 тогда и только тогда, когда для функции $h(z) = R(z)\overline{R(1/\overline{z})}$ $h(D) = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [0,1]$ и h осуществляет N-кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus [0,1]$ областью D, где N – степень h. Построим функцию h в виде суперпозиции элементарных функций.

$$u(z) = \Phi\left[i\frac{z-1}{z+1}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right], \widetilde{u}(z) = \Phi\left(\delta(z)\right),\ z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma_\alpha,$$

– соответственно однолистное и двулистное отображения внешности дуги Γ_α на внешность единичного круга.

$$B(u) = \prod_{\substack{j=1\\ a_j=-1}}^{p} u^2 \prod_{\substack{j=1\\ a_j\neq-1}}^{p} \frac{(1-\overline{u(a_j)}u)(1-\overline{u(1/\overline{a_j})}u)}{(u-u(a_j))(u-u(1/\overline{a_j}))}.$$

Функции $u(z)$ и $\widetilde{u}(z)$ принимают в симметричных относительно единичной окружности точках попарно сопряженные значения. Отсюда и из симметричности точек a_j и $1/\overline{a_j}$ следует вещественность функции $B(u)$. Кроме того, $B(|u|>1) = \{|u|>1\}$.

Рассмотрим функцию

$$\Omega(z) = \widetilde{u}^{(n-p)_+}(z)B[u(z)].$$

Из принципа симметрии следует, что функция $\Psi[\Omega(z)]$ регулярна во всей плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$ за исключением полюсов a_j и $1/\overline{a_j}$, $j = 1...p$, и полюсов порядка $(n-p)_+$ в точках 0 и ∞. Следовательно,

$$\Psi[\Omega(z)] = \frac{\widetilde{P}(z)}{z^{(n-p)_+}\prod\limits_{j=1}^{p}(z-a_j)(1-\overline{a_j}z)},$$

где $\widetilde{P}$ – алгебраический полином степени $2p + 2(n-p)_+$. Тогда

$$h(z) = \frac{1}{2}(\Psi[\Omega(z)] + 1).$$

На дуге Γ_α имеем $h(z) \equiv |R(z)|^2$, и нули рациональной функции могут быть найдены из уравнения $\Psi[\Omega(z)] = -1$.

В случае полинома приведенное рассуждение сводится к рассуждению, приведенному в [9], в результате которого приходим с точностью до постоянного множителя к полиному Виденского

$$P_\alpha(z)=\begin{cases}\prod\limits_{k=1}^{n/2}(z^2-2a_kz+1), & \text{при четных } n,\\ (z-1)\prod\limits_{k=1}^{(n-1)/2}(z^2-2a_kz+1), & \text{при нечетных } n,\end{cases}$$

где $a_k=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi(2k-1)}{n}$.

Ранее в работе Л.С. Маергойза и Н.Н. Рыбаковой [5] было доказано свойство полинома P_α наименее отклоняться от нуля на дуге окружности среди полиномов с нулями на этой дуге и старшим коэффициентом равным 1 (см. также [6]).

Замечание. Экстремальный полином может быть также представлен в виде

$$P_\alpha(z)=2\varepsilon\sin^n(\alpha/2)\sqrt{z^n}T_n\left(\frac{\sqrt{z}-1/\sqrt{z}}{2i\sin(\alpha/2)}\right),$$

где $T_n(z)$ – полином Чебышева первого рода степени n, а ε – любое число такое, что $|\varepsilon|=1$ (см. [9] [7]).

§2. Неравенства для полиномов

Функция

$$z=\varphi(w)=w\frac{1+w\sin(\alpha/2)}{w+\sin(\alpha/2)}$$

конформно и однолистно отображает область $|w|>1$ на внешность дуги Γ_α, причем бесконечность переходит в бесконечность [3]. Функция $w=\psi(z)$, обратная к функции $z=\varphi(w)$, имеет представление:

$$\psi(z)=-i\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\widetilde{\Phi}\left(i\frac{z-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),\quad z\in\overline{\mathbb{C}}_z\setminus\Gamma_\alpha.$$

С данным полиномом P вида (1) свяжем функцию

$$\rho(z)=\frac{2P(z)\overline{P(1/\overline{z})}-M^2-m^2}{M^2-m^2}.$$

На множестве $G=\{w:\ |w|>1,\ \rho(\varphi(w))\notin[-1,1]\}$ определим мероморфную функцию $\zeta=F(w)$, полагая в точках w, в которых $\varphi(w)\neq0$,

$$F(w)=w\frac{\Phi[\rho(\varphi(w))]}{\Phi^{n-k}[\delta(\varphi(w))]},$$

Пусть $\mathcal{D}$ – совокупность областей, составляющих множество $G \setminus \{w : |F(w)| = 1\}$. В силу принципа максимума модуля для реглярной функции имеет место неравенство

$$\left| \frac{w}{\Phi[\delta(\varphi(w))]} \right| < 1, \quad |w| > 1.$$

Отсюда, а также из граничных свойств функций $\Phi[\rho(\varphi(w))]$ и $\Phi[\delta(\varphi(w))]$ следует, что при приближении точки w к границе каждой области из $\mathcal{D}$ все предельные значения $|F(w)|$ меньше либо равны единице. Более того, $0 < |F'(\infty)| < \infty$. Повторяя доказательство леммы 2.2 [15] по отношению к функции $1/F(1/w)$, убеждаемся, что для любой области $D \in \mathcal{D}$ выполняется либо $F(D) \cap \{\zeta : |\zeta| > 1\} = \emptyset$, либо $F(D) = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$. Во втором случае существует обратная к $F(w)$ функция $w = f(\zeta)$, однолистно отображающая $|\zeta| > 1$ на область D.

Теорема 4. *Пусть P – полином вида (1) и $h(z) = P(z)\overline{P(1/\overline{z})}$, тогда любых точек z имеет место неравенство*

$$\left|2h(z) - M^2 - m^2 + 2\sqrt{(h(z) - M^2)(h(z) - m^2)}\right| \leq$$

$$\leq (M^2 - m^2)\frac{\beta_{\lambda,r(z)}}{r(z)} \left|\Phi\left[\frac{2}{1-\cos\alpha}\Psi(z) - \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right]\right|^{n-k}, \qquad (5)$$

Кроме того, при $|\psi(z)| > r_\lambda$ справедливо неравенство

$$\left|2h(z) - M^2 - m^2 + 2\sqrt{(h(z) - M^2)(h(z) - m^2)}\right| \geq$$

$$\geq (M^2 - m^2)\frac{\alpha_{\lambda,r(z)}}{r(z)} \left|\Phi\left[\frac{2}{1-\cos\alpha}\Psi(z) - \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right]\right|^{n-k}, \qquad (6)$$

где

$$\lambda = \frac{4|c_n c_k| \sin^{2(n-k)}(\alpha/2)}{M^2 - m^2}, \qquad r(z) = |\psi(z)|,$$

а $\alpha_{\lambda,r(z)}$, $\beta_{\lambda,r(z)}$ – корни уравнений

$$\lambda(r(z)+1)^2 x = r(z)(x+1)^2 \quad \text{и} \quad \lambda(r(z)-1)^2 x = r(z)(x-1)^2,$$

соответственно, лежащие на интервале $(1, r(z)]$;

$$r_\lambda = 2\lambda^{-1} - 1 + 2\sqrt{\lambda^{-1}(\lambda^{-1} - 1)}.$$

Знаки равенства в (5) и (6) при подходящем выборе корня достигаются, например, для полинома P_α.

Доказательство. Пусть $w = f(\zeta)$ – функция, определенная выше. Непосредственным вычислением получаем

$$\frac{1}{f'(\infty)} = \lim_{w\to\infty} \frac{F(w)}{w} = \frac{4c_n\overline{c_k}\sin^{2(n-k)}(\alpha/2)}{M^2 - m^2}.$$

Лемма Шварца дает $\lambda = |f'(\infty)|^{-1} \leq 1$. (см. также [9]).

Функция $f_1(\zeta) = f'(\infty)/f(1/\zeta)$ однолистна в круге $|\zeta| < 1$, меньше по модулю, чем λ^{-1}, и представляется степенным рядом

$$f_1(\zeta) = \zeta + \alpha_2\zeta^2 + \alpha_3\zeta^3 + \ldots .$$

В классе таких функций известны точные оценки

$$\left(\frac{1+|\lambda f_1(\zeta)|}{1+|\zeta|}\right)^2 \leq \left|\frac{f_1(\zeta)}{\zeta}\right| \leq \left(\frac{1-|\lambda f_1(\zeta)|}{1-|\zeta|}\right)^2, \quad 0 < |\zeta| < 1. \qquad (7)$$

Знак равенства слева или справа в (7), хотя бы в одной точке имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{f_1(\zeta)}{(1+e^{i\beta}\lambda f_1(\zeta))^2} \equiv \frac{\zeta}{(1+e^{i\beta}\zeta)^2},$$

где β – вещественное число. (см., например [15],[17]).

Пусть w, $|w| = r$, $\varphi(w) \neq 0$, есть точка множества $f(|\zeta| > 1)$. Правое неравенство в (7) дает

$$\frac{(|F(w)|-1)^2}{|F(w)|} \leq \lambda\frac{(r-1)^2}{r}.$$

Так как функция $y = (x-1)^2/x$ строго возрастает на промежутке $x > 1$ существует единственный корень $\beta_{\lambda,r}$ уравнения $\lambda(r-1)^2x = r(x-1)^2$, лежащий в интервале $(1, r]$. Отсюда также следует, что $|F(w)| \leq \beta_{\lambda,r}$, то есть

$$|\Phi[\rho(\varphi(w))]| \leq \frac{\beta_{\lambda,r}}{r}|\Phi^{n-k}[\delta(\varphi(w))]|. \qquad (8)$$

Если же $w \notin f(|\zeta| > 1)$, то будет выполняться неравенство $|F(w)| \leq 1$, то есть

$$|\Phi[\rho(\varphi(w))]| \leq \frac{1}{r}|\Phi^{n-k}[\delta(\varphi(w))]| < \frac{\beta_{\lambda,r}}{r}|\Phi^{n-k}[\delta(\varphi(w))]|.$$

Таким образом, (8) выполняется при любом w, $|w| > 1$, $\varphi(w) \neq 0$. Делая замену $\varphi(w) = z$ и используя явное представление функции $\delta(\xi)$, получаем неравенство (5)

Убедимся теперь в справедливости неравенств (6). Пусть w, $|w| = r > r_\lambda$, $\varphi(w) \neq 0$, есть точка множества $f(|\zeta| > 1)$. Левое неравенство в (7) и строгое возрастание функции $y = (x+1)^2/x$ на промежутке $x > 1$ дают

$$\frac{(|F(w)|+1)^2}{|F(w)|} \geq \lambda \frac{(r+1)^2}{r} > \lambda \frac{(r_\lambda+1)^2}{r_\lambda} = 4.$$

Следовательно, существует единственный корень $\alpha_{\lambda,r}$ уравнения $\lambda(r+1)^2 x = r(x+1)^2$, лежащий в интервале $(1, r]$, и для этого корня имеем

$$|F(w)| \geq \alpha_{\lambda,r}. \tag{9}$$

Отсюда,

$$|\Phi[\rho(\varphi(w))]| \geq \frac{\alpha_{\lambda,r}}{r} |\Phi^{n-k}[\delta(\varphi(w))]|. \tag{10}$$

Теперь покажем, что любая точка w, $|w| > r_\lambda$, принадлежит образу $f(|\zeta| > 1)$. Предположим противное, то есть, что имеет место неравенство

$$r_\lambda < r^* = \inf\{r : r > 1,\ |F(w)| > 1 \ \ \forall w,\ |w| = r\}.$$

На окружности $|w| = r^*$ найдется точка w^*, удовлетворяющая условию

$$|F(w^*)| = 1. \tag{11}$$

С другой стороны, для любой последовательности w_k, $|w_k| > r^*$, $k = 1, 2, ...$, сходящейся к w^*, из (9) получим

$$|F(w_k)| \geq \alpha_{\lambda,r^*}, \qquad k = 1, 2, ...,$$

что противоречит (11). Таким образом, (10) имеет место при любом w, $|w| = r > r_\lambda$, $\varphi(w) \neq 0$. Делая замену $\varphi(w) = z$, убеждаемся в справедливости (6) при $r(z) = |w|$.

Случай равенства следует из тождества $F(w) \equiv w$ при указанном многочлене. Теорема доказана.

Теорема 5. *Для полинома P вида* (1) *имеет место неравенство*

$$|(|P(z)|^2)'_x| \leq \frac{\cos(x/2)\sqrt{(M^2-|P(z)|^2)(|P(z)|^2-m^2)}}{\sqrt{\sin^2(\alpha/2)-\sin^2(x/2)}} \times$$

$$\times \left[n-k-\frac{\Lambda(\alpha,z)\cos(\alpha/2)(1-2\sin^{n-k}(\alpha/2)\sqrt{|c_n c_k|/(M^2-m^2)})}{2\cos(x/2)} \right], \tag{12}$$

где $z = e^{ix} \in \Gamma_\alpha$ *и*

$$\Lambda(\alpha, z) = \left| \Phi\left(i\frac{z-\cos\alpha}{\sin\alpha} \right) \right|.$$

Знак равенства в (12) *достигается, например, для полинома* P_α.

Доказательство. Пусть $w = f(\zeta)$ – функция, определенная выше. Если точка ζ, $|\zeta| = 1$, является точкой регулярности функции $f(\zeta)$, причем $|f(\zeta)| = 1$, то получаем (см. [15, с. 21])

$$|f'(\zeta)| \geq \frac{1}{2\sin^{n-k}(\alpha/2)}\sqrt{\frac{M^2 - m^2}{|c_n c_k|}}. \tag{13}$$

Если точка w, $|w| = 1$, является точкой регулярности функции $|F(w)|$ и одновременно лежит на границе области $D \in \mathcal{D}$ такой, что $F(D) \cap \{\zeta : |\zeta| > 1\} = \emptyset$, то в этой точке выполняется неравенство

$$\frac{\partial |F|}{\partial |w|} \leq 0.$$

Если $F(D) = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$, то, применяя неравенство (13), получаем в этой точке

$$\frac{\partial |F|}{\partial |w|} = |f'(\zeta)|^{-1} \leq 2\sin^{n-k}(\alpha/2)\sqrt{\frac{|c_n c_k|}{M^2 - m^2}}. \tag{14}$$

Таким образом, неравенство (14) выполняется во всех точках единичной окружности за исключением, может быть, конечного числа таких точек.

Далее, под значениями функции $w = \psi(z)$ в точках дуги Γ_α будем понимать значения, получаемые в результате регулярного продолжения этой функции из области $|z| > 1$. В точках $w \in \psi(\Gamma_\alpha)$, в которые функции $\Phi[\rho(\varphi(w))]$, $\Phi[\delta(\varphi(w))]$ конформно продолжаются из $|w| > 1$, имеем

$$\frac{\partial |F|}{\partial |w|} = 1 + \left|\frac{\partial}{\partial w}\Phi[\rho(\varphi(w))]\right| - \left|\frac{\partial}{\partial w}\Phi^{n-k}[\delta(\varphi(w))]\right|.$$

Полагая $\varphi(w) = z = e^{ix}$ и учитывая (14), приходим к неравенству

$$|\Phi'[\rho(z)]\rho'(z)\varphi'(\psi(z))| \leq (n-k)|\Phi'[\delta(z)]\delta'(z)\varphi'(\psi(z))| -$$

$$- \left[1 - 2\sin^{n-k}(\alpha/2)\sqrt{|c_n c_k|/(M^2 - m^2)}\right],$$

тогда

$$\frac{|\rho'(z)|}{\sqrt{1-\rho^2(z)}}| \leq (n-k)\frac{\cos(x/2)}{\sqrt{\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(x/2)}} -$$

$$-\frac{1 - 2\sin^{n-k}(\alpha/2)\sqrt{|c_n c_k|/(M^2 - m^2)}}{|\varphi'(\psi(z))|}. \tag{15}$$

Далее

$$\varphi'(\psi(z)) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[1 - \widetilde{\Phi}^{-2}\left(i\frac{z - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right],$$

откуда

$$|\varphi'(\psi(z))| = 2\left|\widetilde{\Phi}\left(i\frac{z-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right|^{-1}\frac{\sqrt{\sin^2(\alpha/2)-\sin^2(x/2)}}{\cos(\alpha/2)}.$$

Для доказательства неравенства (12) остается заметить, что при данном выборе точек w на окружности $|w|=1$ выполняется

$$\left|\widetilde{\Phi}\left(i\frac{z-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right| = \Lambda(\alpha, z),$$

а также, как и при доказательстве теоремы 3, что

$$\begin{aligned}|\rho'(z)| &= |P'(z)\overline{P(1/\overline{z})} + P(z)\overline{P'(1/\overline{z})}(-1/z^2)| = \\ &= |zP'(z)\overline{P(z)} - \overline{z}\overline{P'(z)}P(z)| = 2|\Im zP'(z)\overline{P(z)}| = \\ &= 2\left|\Im\frac{zP'(z)}{P(z)}P(z)\overline{P(z)}\right| = |(|P(z)|^2)'_x|.\end{aligned}$$

Случай равенства следует из тождества $F(w)\equiv w$ при указанном многочлене. Теорема доказана.

Устремляя α к π при $k=0$, приходим к неравенству, полученному В.Н. Дубининым в работе [18, Теорема 2]

Теорема 6. *Для коэффициентов полинома P вида* (1) *при $n-k\geq 3$ справедливо неравенство*

$$\frac{4|c_nc_k|\sin^{2(n-k)}(\alpha/2)}{M^2-m^2}\left(1+\frac{1}{\sin(\alpha/2)}\left|\left(\frac{c_{n-1}}{2c_n}+\frac{\overline{c_{k+1}}}{2\overline{c_k}}\right)+(n-k)\cos^2(\alpha/2)\right|\right)\leq 1. \tag{16}$$

Знак равенства в (16) *достигается, например, для полинома P_α.*

Доказательство. В некоторой проколотой окрестности точки $w=0$, следуя работе А.В. Олесова[3], рассмотрим функцию

$$\widetilde{F}(w) := \frac{1}{F(1/w)} \equiv w\frac{\Phi^{n-k}[\delta(\varphi(1/w))]}{\Phi[\rho(\varphi(1/w))]}$$

и пусть $\Delta(w) = w\widetilde{F}'(w)/\widetilde{F}(w)$. Для этой функции имеем

$$\Delta(w) = 1 + \frac{\varphi'(1/w)}{w}\left[\frac{\Phi'[\rho(\xi)]\rho'(\xi)}{\Phi[\rho(\xi)]} - (n-k)\frac{\Phi'[\delta(\xi)]\delta'(\xi)}{\Phi[\delta(\xi)]}\right], \quad \xi = \varphi(1/w).$$

Заметим, что $w\varphi(1/w)\to\varphi'(\infty) = \sin(\alpha/2)$ при $w\to 0$. Поэтому

$$\lim_{w\to 0}\frac{\Delta(w)-1}{w} = \lim_{\xi\to\infty}\frac{\xi^2}{\sin(\alpha/2)}\left[\frac{\rho'(\xi)}{\sqrt{\rho^2(\xi)-1}} - (n-k)\frac{\delta'(\xi)}{\sqrt{\delta^2(\xi)-1}}\right]$$

$$= \lim_{\xi\to\infty} \frac{(M^2-m^2)\sin(\alpha/2)}{c_n\overline{c_k}\xi^{n-k}} \left[\frac{2}{M^2-m^2}\left(P'(\xi)\overline{P(1/\bar{\xi})}\xi - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{P(\xi)\overline{P'(1/\bar{\xi})}}{\xi}\right)\delta(\xi) - \frac{(n-k)(\xi-1/\xi)\rho(\xi)}{2\sin^2(\alpha/2)}\right] =$$

$$= \lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{c_n\overline{c_k}\sin(\alpha/2)\xi^{n-k}}\times$$

$$\times\left[\left((nc_n\xi^n+(n-1)c_{n-1}\xi^{n-1}+...+kc_k\xi^k)\left(\frac{\overline{c_n}}{\xi^n}+...+\frac{\overline{c_{k+1}}}{\xi^{k+1}}+\frac{\overline{c_k}}{\xi^k}\right)-\right.\right.$$

$$\left.(c_n\xi^n+c_{n-1}\xi^{n-1}+...+c_k\xi^k)\left(\frac{n\overline{c_n}}{\xi^n}+...+\frac{(k+1)\overline{c_{k+1}}}{\xi^{k+1}}+\frac{k\overline{c_k}}{\xi^k}\right)\right)\times$$

$$\left.\times\left(\xi-2\cos^2(\alpha/2)\right)-(n-k)(c_n\xi^{n+1}+c_{n-1}\xi^n+...+c_k\xi^k)\left(\frac{\overline{c_n}}{\xi^n}+...+\frac{\overline{c_{k+1}}}{\xi^{k+1}}+\frac{\overline{c_k}}{\xi^k}\right)\right]=$$

$$= \frac{-c_n\overline{c_{k+1}}-c_{n-1}\overline{c_k}-2(n-k)c_n\overline{c_k}\cos^2(\alpha/2)}{c_n\overline{c_k}\sin(\alpha/2)}.$$

С другой стороны, по правилу Лопиталя следует, что

$$\lim_{w\to 0}\frac{\Delta(w)-1}{w} = \frac{\widetilde{F}''(0)}{2\widetilde{F}'(0)},$$

откуда

$$\widetilde{F}''(0) = 2\widetilde{F}'(0)\frac{-c_n\overline{c_{k+1}}-c_{n-1}\overline{c_k}-2(n-k)c_n\overline{c_k}\cos^2(\alpha/2)}{c_n\overline{c_k}\sin(\alpha/2)}.$$

Обозначим через $\widetilde{f}(\zeta)$ функцию, однолистную в единичном круге $|\zeta|<1$, являющуюся обратной к $\widetilde{F}(w)$. Для этой функции

$$\widetilde{f}''(0) = -\widetilde{F}''(0)(\widetilde{f}'(0))^3 =$$

$$= 32\frac{c_n\overline{c_{k+1}}+c_{n-1}\overline{c_k}+2(n-k)c_n\overline{c_k}\cos^2(\alpha/2))c_n\overline{c_k}\sin^{4(n-k)-1}(\alpha/2)}{(M^2-m^2)^2}.$$

Тогда при $\lambda = \dfrac{4|c_nc_k|\sin^{2(n-k)}(\alpha/2)}{M^2-m^2}$ функция $f^*(0) = \widetilde{f}(\zeta)/\widetilde{f}'(0)$ в единичном круге $|\zeta|<1$ однолистна, по модулю меньше, чем λ^{-1}, и представляется степенным рядом

$$f^*(\zeta) = \zeta + \alpha_2\zeta^2 + \alpha_3\zeta^3 + ...,$$

где

$$\alpha_2 = 4\frac{(c_n\overline{c_{k+1}}+c_{n-1}\overline{c_k}+2(n-k)c_n\overline{c_k}\cos^2(\alpha/2))\sin^{2(n-k)-1}(\alpha/2)}{(M^2-m^2)}.$$

В этом случае согласно [17, с. 94]

$$|\alpha_2| \le 2(1-\lambda). \tag{17}$$

Откуда следует (16). Случай равенства следует из тождества $F(w) \equiv w$ при указанном многочлене. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Borwein P., Erdelyi T. Polynomials and Polynomial Inequalities. N. Y.: Springer-Verlag, 1995. 480 p.

[2] Rahman Q.I., Schmeisser G. Analytic theory of polynomials. Oxford: Oxford University Press, 2002.

[3] Олесов А.В. О применении конформных отображений к неравенствам для тригонометрических полиномов // Матем. заметки. 2004. Т. 76, № 3. С. 396-408.

[4] Тышкевич С.В. О чебышёвских полиномах на дугах окружности // Матем. заметки. 2007. Т. 81, № 6. С. 952-954.

[5] Маергойз Л.С., Рыбакова Н.Н. Многочлены Чебышева с нулевым множеством на дуге окружности и смежные вопросы. Препринт 312М, Институт физики им. Л.В. Киренского СО РАН, Красноярск, 2008, 1-16.

[6] Маергойз, Л.С., Рыбакова Н.Н. Многочлены Чебышёва с нулевым множеством на дуге окружности // Доклады АН. 2009. Т. 426, № 1. С. 26-28.

[7] Lukashov A.L., Tyshkevich S.V. Extremal polynomials on arcs of the circle with zeros on these arcs // J. Contemp. Math. Anal., Armen. Acad. Sci. 2009 V. 44 № 3. P. 172-179.

[8] Арестов В.В., Менделев А.С. О тригонометрических полиномах, наименее уклоняющихся от нуля // Докл. РАН 2009. Т. 425, № 6. С. 733-736.

[9] Дубинин В.Н., Калмыков С.И. О полиномах с ограничениями на дугах окружности // Зап. научн. семин. ПОМИ. СПб. 2011. Т. 392. С. 74–83.

[10] Nagy B., Totik V. Bernstein's Inequality for Algebraic Polynomials on Circular Arcs // Constructive approximation. 2013. V. 37. №2. P. 223-232.

[11] Дубинин В.Н., Калмыков С.И. Принцип мажорации для мероморфных функций // Математический сборник. 2007. Т.198. №12. С. 37-46.

[12] Калмыков С.И. Принципы мажорации и некоторые неравенства для полиномов и рациональных функций с предписанными полюсами // Зап. научн. семин. ПОМИ. СПб. 2008. Т. 357. С. 143-157.

[13] Дубинин В.Н. О принципах мажорации для мероморфных функций // Матем. заметки. 2008. Т. 84. С. 803-808.

[14] Митюк И.П. Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы. Кубанский гос. ун-т, Краснодар, 1980.

[15] Дубинин В.Н. Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов // Алгебра и анализ. 2001 Т. 13. №5. С. 16–43.

[16] Олесов А.В. Диссертация на соискание ученой степени кандидата наук. 2006.

[17] Лебедев Н.А. Принцип площадей в теории однолистных функций. М.: Наука, 1975.

[18] Дубинин В. Н. Теоремы искажения для полиномов на окружности // Матем. сб. 2000. Т 191. №12. С. 51–60.

Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7
e-mail: sergeykalmykov@inbox.ru